



TITLE:

# AR型モデルの数理的構造について (Mathematical Theory of Control and Systems)

AUTHOR(S):

岸田, 邦治; 山田, 澄; 戸次, 圭介

---

CITATION:

岸田, 邦治 ...[et al]. AR型モデルの数理的構造について (Mathematical Theory of Control and Systems). 数理解析研究所講究録 1985, 562: 48-65

ISSUE DATE:

1985-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99057>

RIGHT:

## A R 型モデルの数理的構造について

岐阜大学 工学部 岸田 邦治

大阪大学 工学部 山田 澄

現在 日立研究所 戸次 圭介

### § 1. はじめに

測度論に基づく純数学的なものと異なり、実際の工学システムから時系列データを取得できるという状況に立って、作り上げた A R 型モデルの極配置に関する理論を紹介する。又、現場での特殊な要請として次の条件を設定する。

- 1) 観測される変数は限られたものとする。
- 2) 定常な時系列データが取得可能とし、データ数は非常に多く、したがって、統計的誤差は殆ど無視できるとする。

さて、本考察で対象としているシステムは原子炉等の巨視系である。マルコフ過程で記述される巨視系をシステムサイズによって展開すると次のような漸近的な線形確率方程式を得る（文献 1）。

$$x(n) = \Phi x(n-1) + f(n) \quad (1)$$

ここで、 $x(n)$  は  $d$  次元の状態変数であり、 $n$  は離散化された時間を示す。 $\Phi$  は  $d \times d$  の減衰定数行列であり、 $f(n)$  は  $d$  次元の白色性ガウス揺動力で、

$$E \{ f(n) f^T(n') \} = V \delta_{nn'}$$

を満たすものとする。

さらに、巨視系をマルコフ過程で記述しようとするれば数多くの状態変数が必要であるが、通常の場合観測されている変数はこの内の限られたものである。そのために観測可能な変数のみでシステムを書き表そうとすれば、システムの情報は縮約され、基礎式(1)は非マルコフ性を帯びる。つまり、観測は次の式で表現されたとする。

$$y(n) = H x(n) \quad (2)$$

ここで、 $H$  は  $d \times q$  の観測行列である。以下では簡単のために  $q = 1$  とする。そして、(1)を観測可能な状態変数の時系列空間  $Y(n) = (y(n), y(n-1), y(n-2), \dots)^T$  へ射影すると次の等価なイノベーション表現が得られる(文献2)。

$$\begin{aligned} x(n | n) &= \Phi x(n-1 | n-1) + K r(n) \\ y(n) &= H x(n) \end{aligned} \quad (3)$$

上式で、 $x(n|n) := E\{x(n) | Y(n)\}$  は条件付期待値であり、物理的な揺動力は等価なイノベーション  $r(n) := y(n) - H\Phi x(n-1|n-1) = y(n) - y(n|n-1)$  で表現できる (文献3)。そして、

$$\begin{aligned} K &= PH^T \Gamma^{-1} \\ \Gamma &= HP H^T = E\{r r^T\} \\ P &= \Phi \{P - PH^T \Gamma^{-1} H P\} \Phi^T + V \end{aligned}$$

である。さらに、 $\{\Phi, K, H\}$  は可観測及び可制御な性質を持っていると仮定しておく。すると、(3)において  $x$  を消去すれば次の AR, MA( $d, d-1$ ) モデルが得られる。

$$y(n) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} r(n) \quad (4)$$

ここで、 $z^{-1}$  は逆時間推進演算子

$$z^{-1} y(n) = y(n-1)$$

であり、

$$\begin{aligned} a(z^{-1}) &= 1 + \sum_{i=1}^d a_i z^{-i} \\ b(z^{-1}) &= 1 + \sum_{i=1}^{d-1} b_i z^{-i} \end{aligned}$$

$$E \{ r(n) r(n') \} = \sigma^2 \delta_{nn'}, \quad \Gamma = \sigma^2.$$

すると、(4)と(1)とは同じ相関関数を与えることになる。つまりAR・MAモデルは同じ相関関数を与えるという意味で(4)は(1)の等価表現になっている(文献4)。観測可能な変数を見ている限り(4)と(1)の区別はつかないし、もちろん、同一のパワースペクトル密度関数

$$\phi_{yy}(z) = f_S(z^{-1}) f_S(z) \quad (5)$$

$$z = e^{i\omega}$$

を持つことになる。ここで、 $f_S(z^{-1}) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} \sigma$ なる因数分解表現である。

## § 2. ARモデルとT・ARモデルについて

定義の紹介を兼ねて、よく知られているm次のARモデルを次式で表わす。

$$\psi_m(z^{-1}) y(n) = \varepsilon(n) \quad (6)$$

$$\psi_m(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^m a_m(i) z^{-i}$$

$$E \{ \varepsilon(n) \varepsilon(n') \} = \sigma_m^2 \delta_{nn'}$$

A R モデルの係数は最小誤差分散になるように決定され、その時の A R モデルの極は  $z^{-1}$  平面内の次式の根である。

$$\psi_m(z^{-1}) = 0$$

そして同定された  $m$  次の A R モデルの  $y(n)$  に対するパワースペクトル密度関数は

$$\begin{aligned} \phi_{m,yy}(z) &= \tilde{\psi}_m^{-1}(z^{-1}) \tilde{\psi}_m^{-1}(z) \\ \tilde{\psi}_m(z^{-1}) &= \sigma_m^{-1} \psi_m(z^{-1}); \quad z = e^{i\omega} \end{aligned}$$

ところで、時系列データ数が非常に多くあるという設定をしているので、A R モデルの係数を決めるべき相関関数の統計誤差について煩わされることはない。むしろ、システム同定を診断に応用するときには注意すべき点は A R モデルと A R . M A モデルとのずれである。たとえば、同定した A R モデルを制御に用いるとすれば、A R モデルの極が元のシステム極とどの程度ずれているかを知らなくてはならない。もし A R モデルの係数が解析的に求まれば A R 極の持つ性質を理解することができるが、A R 係数と物理定数行列  $\Phi$ 、 $V$  あるいは等価な A R . M A 係数とは非線形変換でしか結びついておら

ず、ARモデルの極のもつ数理的意味を直接知ることにはできない。そこで、(6)と(1)又は(4)とを橋渡しする解析的なモデルを以下に紹介する。

まず、(4)の $b(z^{-1})$ の零点を $\lambda_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, d-1$ )とし可逆性を持っているとする。

$$\min |\lambda_i^{-1}| > 1.$$

するとAR・MAモデルの伝達関数又は有理関数 $\frac{a(z^{-1})}{b(z^{-1})}$ は、 $|z^{-1}| < \min_i |\lambda_i^{-1}|$ なる領域においてテール展開することができる。つまり、

$$(1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^{-i}) y(n) = r(n),$$

そこで、 $t_m(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^m c_i z^{-i}$ とすると、

$$t_m(z^{-1}) y(n) = v_m(n),$$

$v$ はもはや白色雑音でなくなる。ところが、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E \{ v_m(n) v_m(n') \} = \sigma^2 \delta_{nn'}$$

であるから $v$ を強引に白色とみなし、ある有限の次数 $m$ で打ち切ると、次のT・ARモデルを得る。

$$t_m(z^{-1}) y(n) = r(n), \quad (7)$$

このようにすればT・ARモデルの極が定義できる。つまり、T・ARモデルの極は $z^{-1}$ 平面で次式の根である。

$$t_m(z^{-1}) = 0$$

T. A R モデルの極は上記の作り方からわかることであるが、 $b$  に大きく依存している。つまり、A R . M A モデルの零点は等価表現のために生じたものであるので観測の仕方によって零点の値が変わるということに注意すべきである。一方、A R . M A モデルの極は不変である。さらに、T. A R モデルのパワースペクトル密度関数も次のようになる。

$$\begin{aligned}\phi_{t_m y y}(z) &= \tilde{t}_m^{-1}(z^{-1}) \tilde{t}_m^{-1}(z) \\ \gamma_m(z^{-1}) &= \sigma^{-1} t_m(z^{-1})\end{aligned}$$

次に、定義された T. A R モデルの極を解析的に調べるために次の補題を述べる。

補題 1。

$z^{-1}$  に関する  $k$  次の多項式  $g(z^{-1})$  と  $\ell$  次の多項式  $h(z^{-1})$  に対し、有理多項式  $\frac{g(z^{-1})}{h(z^{-1})}$  を考える。 $h(z^{-1}) = 0$  の根を  $\xi_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, \ell$ ) とする時  $|z^{-1}| < \min |\xi_i^{-1}|$  によって定義される領域で  $\eta(z^{-1}) := \frac{g(z^{-1})}{h(z^{-1})}$  はテール展開でき

$$\eta(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i z^{-i}$$



として表現する。すると、テーラ展開を  $m$  次で打ち切った多項式は次のように変形することができる。

$$r_m(z^{-1}) = \frac{g(z^{-1})}{h(z^{-1})} - \frac{1}{\det W} \sum_{i=1}^l \frac{u_i g(\xi_i^{-1}) (\xi_i^{-1})^{l-1}}{1 - \xi_i z^{-1}} (\xi_i z^{-1})^{m+1} \quad (8)$$

但し、

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_l \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{l-1} & \xi_2^{l-1} & \cdots & \xi_l^{l-1} \end{pmatrix} \quad \text{Vandermonde 行列}$$

$$u_i = (\text{adj } W)_{li}$$

証明。頁制限上省略。補題 1 によって (7) の  $t_m(z^{-1})$  は

$$t_m(z^{-1}) = \frac{a(z^{-1})}{b(z^{-1})} - \frac{1}{\det S} \sum_{\ell=1}^{d-1} \frac{u_\ell a(\lambda_\ell^{-1}) \lambda_\ell^{d-2}}{1 - \lambda_\ell z^{-1}} (\lambda_\ell z^{-1})^{m+1} \quad (9)$$

となる。ここで、

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{d-1} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{d-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{d-2} & \lambda_2^{d-2} & \cdots & \lambda_{d-1}^{d-2} \end{pmatrix}$$

$$u_\ell = (\text{adj } S)_{d-1, \ell}$$

### § 3. A R 型モデルの極配置

T. A R モデルの極を調べるために A R . M A モデルの極と零点の分布を次のように仮定しておく。つまり、

$$\begin{aligned} a(z^{-1}) &= \prod_{i=1}^d (1 - \alpha_i z^{-1}) \\ b(z^{-1}) &= \prod_{i=1}^{d-1} (1 - \lambda_i z^{-1}) \\ |\alpha_1^{-1}| \leq |\alpha_2^{-1}| \leq \dots \leq |\alpha_{d-2}^{-1}| \leq |\alpha_d^{-1}| \\ |\lambda_1^{-1}| \leq |\lambda_2^{-1}| \leq \dots \leq |\lambda_{d-2}^{-1}| \leq |\lambda_{d-1}^{-1}| \\ |\alpha_1^{-1}| \leq |\alpha_2^{-1}| \leq \dots \leq |\alpha_{\ell_0^{in}}^{-1}| < |\lambda_1^{-1}| < |\alpha_{\ell_0^{in}+1}^{-1}| \end{aligned}$$

つまり、 $|z^{-1}| < |\lambda_1^{-1}|$  なる領域を収束半径円内と呼ぶことにすれば、

(1) の極はこの領域内に  $\ell_0^{in}$  個の極をもつと仮定している。

以上のことから、(9) を

$$b(z^{-1}) t_m(z^{-1}) = a(z^{-1}) - c(z^{-1})$$

$$c(z^{-1}) = \frac{1}{\det S} \sum_{\ell=1}^{d-1} u_\ell \lambda_\ell^{d-2} a(\lambda_\ell^{-1}) \prod_{i=1}^{\ell-1} (1 - \lambda_i z^{-1}) \prod_{i=\ell+1}^{d-1} (1 - \lambda_i z^{-1}) (\lambda_\ell z^{-1})^{m+1}$$

とすれば、 $a(z^{-1})$  は  $d$  次の多項式であり、一方  $c(z^{-1})$  は T. A R モデルの次数とともに変化する多項式である。そこで  $z$  平面内の閉曲線上で評価すれば、 $a$  は  $m$  の依存性がなくて有界な量であり、 $c$  は閉曲線の取り方で  $m$  とともに発散したり零に近づいたりする。したがって、この性質を利用し、又  $a - c$  を適当に分割し、さらにうまく閉曲線を選ぶことで、関数論における Rouché の定理を適用できる。つまり、十分次

数の大きくなった時には T. A R モデルの極分布の性質について次のような定理を得る。

定理 1。

$0 < \varepsilon < 1 - |\lambda_1| |\alpha_{\ell_0^n}^{-1}|$  なる任意の  $\varepsilon$  に対して正整数  $m_0$  が存在し、 $m_0 < m$  なる次数の T. A R モデルは  $z^{-1}$  平面内の

$$|z^{-1}| < |\lambda_1^{-1}| (1 - \varepsilon)$$

を満たす領域内に  $\ell_0^{in}$  個の極をもつ。そして、 $\ell_0^{in}$  個の極は  $m$  が大きくなるにつれてシステム極  $\alpha_i^{-1}$  ( $i=1, 2, \dots, \ell_0^{in}$ ) にそれぞれ収束する。

証明。頁制限上省略。

この定理より収束半径円内のシステム極は T. A R モデルで同定されることがわかる。

定理 2。

$\lambda_1^{-1}$  が実数で  $|\lambda_1^{-1}| < |\lambda_2^{-1}|$  を満足すると仮定する。そして、

$$0 < \varepsilon < 1 - |\lambda_1| |\alpha_{\ell_0^n}^{-1}|$$

を満たす任意の  $\varepsilon$  に対して正整数  $m_0$  が存在して、 $m > m_0$  なる次数の T. A R モデルは  $z^{-1}$  平面内の

$$|\lambda_1^{-1}| (1 - \varepsilon) < |z^{-1}| < |\lambda_1^{-1}| (1 + \varepsilon)$$

なる円環領域内に  $m - \ell_0^{in}$  個の極を持つ。

証明。頁制限上省略。

この定理より半径が 1 の円にもっとも近い A R. M A 零点

を半径とする円環上に残りの T . A R モデルの極は分布する。  
 この円環は A R . M A 零点の等価表現であり、円環内に T .  
 A R モデル極分布の歪みが折り込まれ、これが残りの A R .  
 M A 零点や極の等価表現になっている（文献 5）。定理 1 と  
 2 をまとめて図示したのが図 1 である。

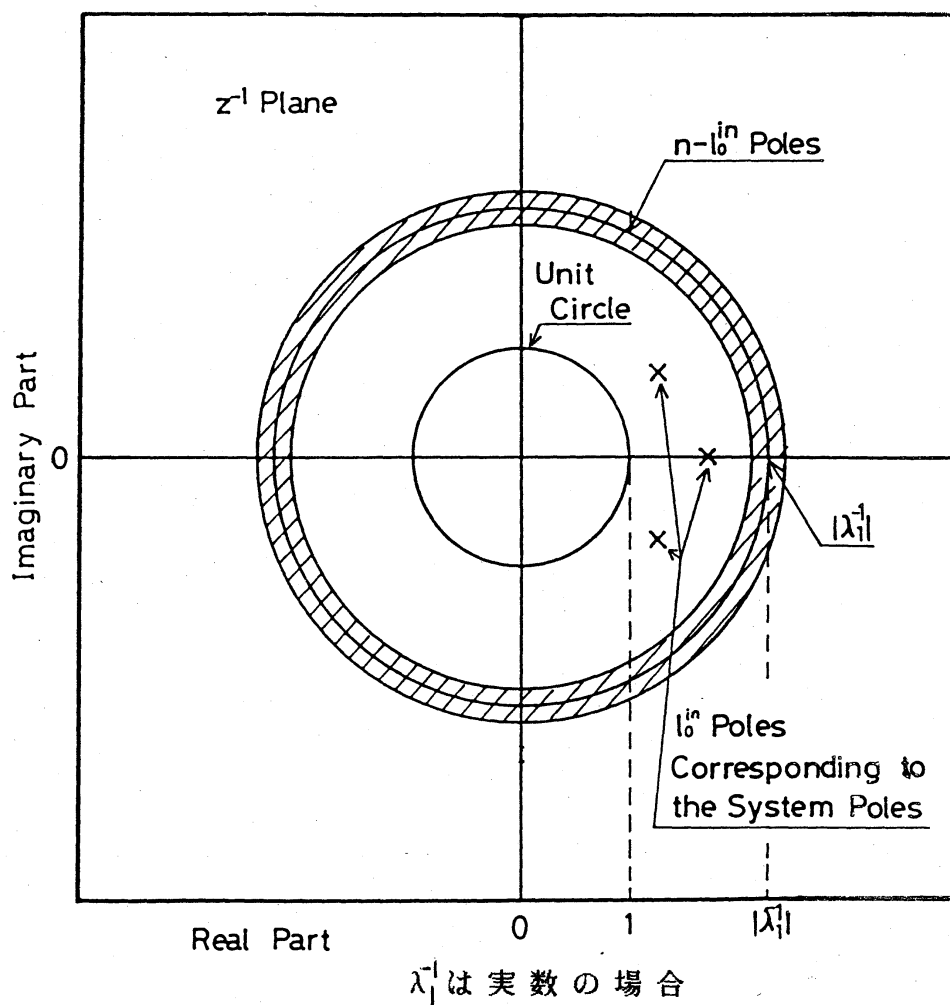


図 1 . T . A R モデルの極配置

定理 3。

$\lambda_1^{-1}$  と  $\lambda_2^{-1}$  が共役複素数であり、 $|\lambda_1^{-1}| = |\lambda_2^{-1}| < |\lambda_3^{-1}|$  を満たしていると仮定する。この時、

$$0 < \varepsilon < 1 - |\lambda_1^{-1}| \alpha_{\ell_0}^{-1n}$$

なる任意の  $\varepsilon$  を与えると、正整数  $m_0$  が存在し  $m > m_0$  なる次数の T. A R モデルは  $z^{-1}$  平面内で、

$$|\lambda_1^{-1}|(1 - \varepsilon) < |z^{-1}| < |\lambda_1^{-1}|(1 + \varepsilon)$$

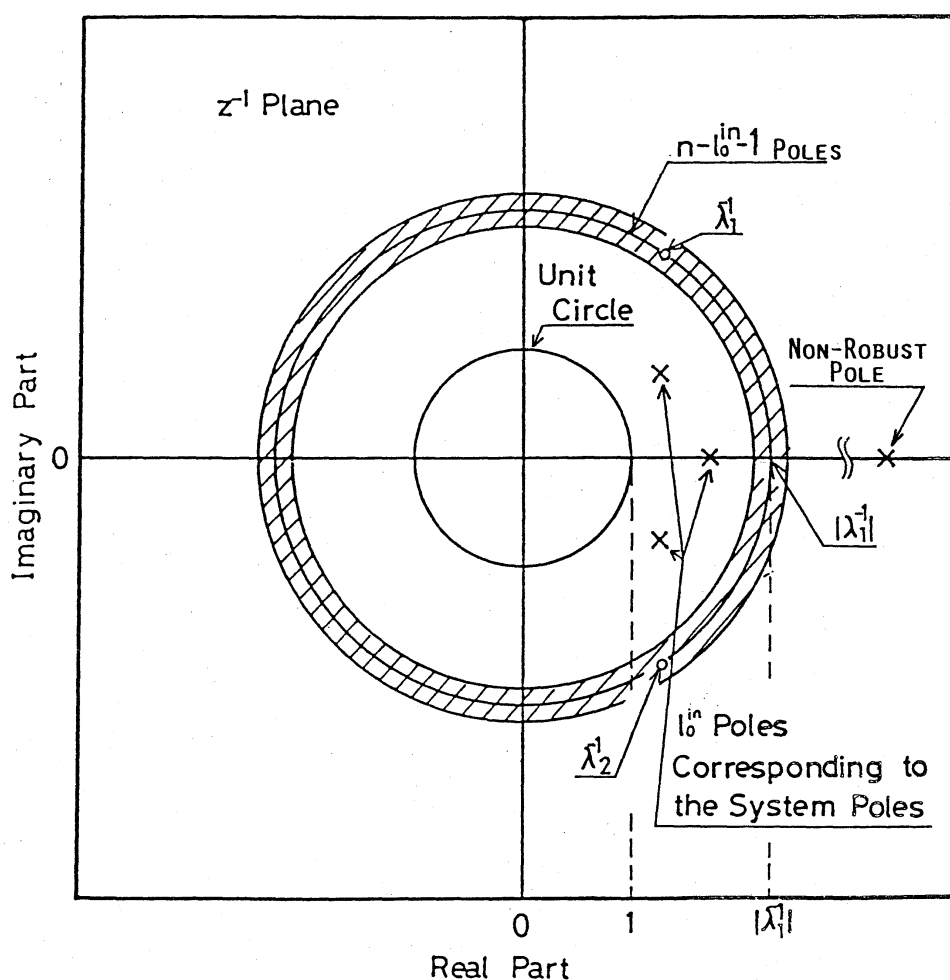
を満たす円環領域内で、 $m$  の値に応じて、 $m - \ell_0^{in}$  個かあるいは  $m - \ell_0^{in} - 1$  個の極を持つ。さらに、この円環領域内に  $m - \ell_0^{in} - 1$  個の極を持つ場合、

$$|z^{-1}| > |\lambda_1^{-1}|(1 + \varepsilon)$$

を満たす領域内の実軸上に T. A R モデルは 1 個の極を持つ。  
証明。頁制限上省略。

円環上と円環内の T. A R モデルの極は定理 2 と同じである。定理 3 で、円環外の T. A R モデルの極は A R. M A 零点や極又はシステム極と直接結びついていないので『特異根』と呼び、さらに、T. A R モデルの次数に応じて出現したり、消えたりするので『non-robust』特異根と呼ぶ。もちろん、 $\lambda^{-1}$  が複素数であっても non-robust 特異根を持たない場合も起こり得る。さらに、本考察では観測変数が 1 個としたが、もし複数の変数を観測しておれば、T. A R モデルの次数に依

存せず円環外に存在する『robust特異根』やAR・MA零点を等価表現する『多重円環上に分布する根』をT・ARモデルが持つこともあると既にわかっている（文献6）。定理1と3をまとめて図示したのが図2である。



$\lambda_1^{-1}$ と $\lambda_2^{-1}$ は共役複素数の場合

図2。 T・ARモデルの極配置

#### § 4. A R 型モデルの収束性について

これまで T. A R モデルの極配置について見てきたが、A R モデル解析でも同様な数値計算結果がえられている。そこで、A R モデルにも関係のある性質を調べることにする。そのために多項式の関数空間を定義する。H を  $|z|=1$  で正則な多項式の集合とし、この空間に次の内積とノルムを定義する。

$$\begin{aligned} (h_1(z^{-1}), h_2(z^{-1})) &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} h_1(z) h_2(z) \phi_{yy}(z) \frac{dz}{z} \\ \|h_1(z^{-1})\|_2^2 &:= (h_1(z^{-1}), h_1(z^{-1})) \end{aligned}$$

いま、 $g_m(z^{-1})$  を  $z^{-1}$  平面で定義された  $m$  次の多項式とし、

$$g_m(0) \geq \tilde{\psi}_m(0) = \sigma_m^{-1}$$

を満足すると仮定すれば、次の補題が成り立つ。

#### 補題 2.

任意の次数の  $g_m(z^{-1})$  に対して次式が成立する。

$$\begin{aligned} \|g_m(z^{-1}) - f_s^{-1}(z^{-1})\|_2 &\geq \|\tilde{\psi}_m(z^{-1}) - f_s^{-1}(z^{-1})\|_2 \quad (10) \\ &= \{2(1 - \sigma \sigma_m^{-1})\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

このことは、 $\psi_m(z^{-1})$  が最小多項式であるという性質と、

(文献 7) に用いられている性質を合わせることにより証明される。さらに、補題 2 において特に  $g_m(z^{-1})$  として T. A R モデルをとれば、さらに (10) は評価できて A R. M A 零

点と結びついて次の補題を得る。

補題 3。

ある有界な複素数  $\mu_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, d-1$ ) が存在して、  
任意の次数  $m$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{d-1} \mu_{ij} (\lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1})^m &\geq \| \tilde{\psi}_m(z^{-1}) - f_S^{-1}(z^{-1}) \|_2^2 \\ &= 2 (1 - \sigma \sigma_m^{-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

が成立する。

証明。T. A R モデルを代入し、ノルムを計算すれば明らか。

(11)の不等式は  $m$  が十分大きくなると左辺は最も小さい値を持つ A R. M A モデルの零点  $\lambda_i^{-1}$  だけで代表できる。つまり、ある有界な数が存在して、(11)は次のように評価できる。

$$\| \tilde{\psi}_m(z^{-1}) - f_S^{-1}(z^{-1}) \|_2^2 \leq \mu_0 |\lambda_1^{-1}|^{-2m} \quad (12)$$

この式の意味することは A R モデルと元のシステムとのずれが A R. M A モデルの零点のうちで一番単位円に近いものの巾の逆数で評価できることを示している。

以上 § 1、2、3 をまとめてみると、観測による情報の縮約で、A R. M A モデルの零点は元のシステムを等価表現するために必要になり、それが A R 型モデルの円環上極として分布し、さらに A R 型モデルの収束にも関係していることがわかった。



# § 5. おわりに

実際の原子炉出力データを用いた解析例を示す。時系列データはBorssele加圧水型原子炉内の中性子数で、図3のような結果が得られた（文献8）。

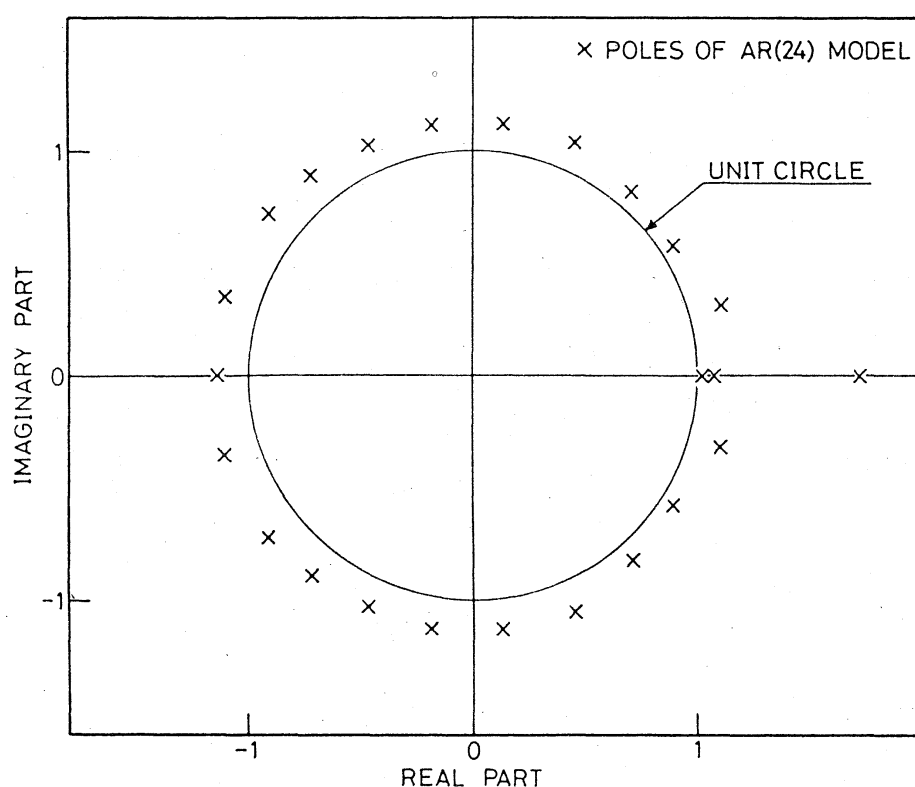


図3。Borssele炉を同定したARモデルの極配置

用いた中性子数の時系列データ数は8192個であり、サンプリング周波数は100Hzであった。図3と理論とを比べてみると定性的にはよく一致している。つまり、同定されたARモデ

ルの極配置は

- 1) A R . M A 零点に等価な収束円環上の極を持つ。
- 2) 収束半径円内のシステム極は同定されている。
- 3) 図3の収束円環外の実数のA R 極は次数が変わると消えるのでnon-robust特異根である。つまり、15次から24次まで次数を変えたときA R モデルのうちnon-robust特異根を持った次数は15, 16, 18, 19, 24次のモデルであった。

最後に、基礎式として用いた(1)の仮定が成り立つべき空間的・時間的領域は未臨界原子炉においては既に確認されている。一方出力原子炉の場合、熱水力学的フィードバック機構も生じ、乱流現象も伴い、境界の形状も複雑であり、空間依存も考慮しなければならない。したがって、図3の定量的な評価は今後必要である。

## 参考文献

- (1) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. 9, 51 (1973). K. Kishida, S. Kanemoto and T. Sekiya, J. Nucl. Sci. Technol., 13, 19 (1976). K. Kishida and H. Sasakawa, J. Nucl. Sci. Technol. 17, 16 (1980)
- (2) K. Kishida, Phys. Rev. A 25, 496 (1982).
- (3) K. Kishida, J. Math. Phys. 25, 1308 (1984).
- (4) 岸田邦治、数理解析研究所講究録434, 144頁 (1981)。
- (5) 岸田邦治、山田澄、戸次圭介 昭和57-59年日本原子力学会、(I)-(VIII)。山田澄、岸田邦治、戸次圭介 第5回 Dynamical System Theory シンポジウム (昭和58年) 257, 263 頁
- (6) 論文作成中。
- (7) T. Kailath, A. Vieira and M. Morf, SIAM Rev. 20, 106 (1978).
- (8) 山田澄、山本直樹、佐藤雄、杉林信雄、神余浩夫、岸田邦治、presented at the conference (SMORN-IV, Dijon, France 1984) for benchmark test. Y. Shinohara and J. Hirota, JAERI-M 84-025 (1984).